SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION

DANS UN MILIEU RÉSISTANT, D'UN SYSTÈME DE PLANS D'UNE ÉPAISSEUR CONSTANTE ET D'UN CONTOUR DÉTERMINÉ, AUTOUR D'UN AXE INCLINÉ, PAR RAPPORT A L'HORIZON;

SUIVI

DE LA DÉTERMINATION DU RAYON VECTEUR

DANS LE MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES PLANÈTES.

THÈSE

PRÉSENTÉE ET SOUTENUE DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ACADÉMIE DE PARIS, LE MAI 1825,

PAR VICTOR BOUNIAKOWSKY.

PARIS,
A. ÉGRON, IMPRIMEUR DE Mgr LE DAUPHIN,
RUE DES NOYERS, N° 37.
1825.

A MON AMI

LE C^{TE} ALEXANDRE DE TORMASSOFF.

Témoignage d'amitié et de reconnaissance.

Victor Bouniakowsky.

UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM.	THÉNARD, DOYEN	Professeurs.
	LACROIX	
	BIOT	
	POISSON	
	FRANCŒUR	
	GAY-LUSSAC	
	DESFONTAINES	
	GEOFFROY-SAINT-HILAIRE	
	BEUDANT	
	DINET, suppléé par M. LEROY	Professeurs-Adjoints.
	MIRBEL	
	HACHETTE	
	DE BLAINVILLE	
	DULONG	
	CAUCHY	

SUR

LE MOUVEMENT DE ROTATION

DANS UN MILIEU RÉSISTANT D'UN SYSTÈME DE PLANS D'UNE ÉPAISSEUR CONSTANTE ET D'UN CONTOUR DÉTERMINÉ, AUTOUR D'UN AXE INCLINÉ, PAR RAPPORT A L'HORIZON.

Nous nous proposons d'analyser toutes les circonstances du mouvement d'un système de plans qui se croisent autour d'un axe fixe. Nous supposerons que le système ne peut avoir qu'un mouvement de rotation autour de la ligne d'intersection de tous ces plans; de plus, nous ferons entrer en considération la résistance de l'air, sans toutefois avoir égard au frottement qui a lieu aux extrémités de l'axe. D'ailleurs, les plans seront supposés d'une épaisseur constante, et d'un contour déterminé. Pour trouver les équations différentielles du mouvement que nous considérons, nous ferons usage de l'équation générale du mouvement d'un système quelconque. Cette équation, telle que l'a donnée *Lagrange* dans sa *Mécanique Analytique* *, se trouve exprimée par la formule suivante :

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)m+S\,(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\text{ etc.})\,m=o.$$

Dans cette formule, x, y, z, représentent les coordonnées du point m auquel sont appliquées les forces P, Q, R, etc., dirigées respectivement, suivant les droites représentées par p, q, r, etc.; δx, δy, δz, δp, δq, δr, etc., sont les changemens infiniment petits de x, y, z, p, q, r, etc., compatibles avec les liaisons du système. Quant aux signes S, ils représentent la somme des quantités semblables, relativement à tous les points.

Pour appliquer cette formule générale au cas particulier qui nous occupe, nous représenterons par x, y, z, les coordonnées d'un plan choisi arbitrairement parmi ceux que nous considérons; par x', y', z, les coordonnées de celui qui se trouve immédiatement après dans le sens du mouvement direct de rotation, et que nous sup-

* Tome premier, seconde partie, section II, page 251.

poserons s'effectuer de droite à gauche, autour de l'axe des z; par x'', y'', z, les coordonnées du plan qui vient immédiatement après le second, et ainsi de suite. Nous remplacerons la masse m par un élément infiniment petit dm, et la somme

$$\mathrm{S}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)m \text{ par } \Sigma\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dm,$$

où l'intégrale indiquée par le signe $\int$ doit être étendue à toutes les molécules d'un plan, et Σ représentant la somme des intégrales semblables, relativement à tous les plans. Quant aux forces accélératrices, appliquées à notre système, il faut les considérer comme agissant sur toutes les molécules des plans; et, en les concevant décomposées suivant les demi-axes des coordonnées positives, la somme $S(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\text{ etc.})m$ se trouvera remplacée par $-\Sigma\int(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)dm$, expression dans laquelle Xdm, Ydm, Zdm, représentent les forces agissant sur un élément dm d'un plan parallèlement aux axes des coordonnées. Nous aurons de cette manière :

$$\Sigma\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dm=\Sigma\int(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dm.$$

Notre système, supposé tourner autour de l'axe des z, intersection de tous les plans, ne peut avoir d'autre mouvement virtuel, que celui de rotation autour de ce même axe; par conséquent, δz sera zéro pour tout mouvement virtuel, et notre formule se changera en

$$\Sigma\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right)dm=\Sigma\int(X\delta x+Y\delta y)\,dm\,.........(\mathrm{A}).$$

La distance d'un élément du système à l'axe des z ne variant point, pendant un mouvement virtuel, on aura x^2+y^2 égal à une quantité constante, ce qui entraîne nécessairement l'équation :

$$(x+\delta x)^2+(y+\delta y)^2=x^2+y^2,$$

d'où l'on tire :

$$x\delta x+y\delta y=0$$

ou

$$\frac{\delta y}{x}=-\frac{\delta x}{y}=\frac{\pm\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

L'expression $\frac{\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ représentant une vitesse angulaire multipliée par l'élément du temps dt; en appelant ω cette vitesse, et en supposant que le mouvement de rotation est direct, on devra admettre le signe $+$ devant le radical, de sorte qu'on aura :

$$\frac{\delta y}{x}=-\frac{\delta x}{y}=\omega dt;$$

de là on tire

$$\delta y = \omega x dt \text{ et } \delta x = -\omega y dt.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (A), et effaçant le facteur commun ωdt, on trouve :

$$\Sigma\int\left(\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2}\right)dm = \Sigma\int(xY - yX)\,dm \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{B}).$$

Pour évaluer l'expression

$$\Sigma\int\left(\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2}\right)dm,$$

supposons que φ représente au bout du temps t l'angle que le plan dont les coordonnées sont x, y, z fait avec le plan des x et z ; $\varphi+\alpha'$, $\varphi+\alpha''$,..... seront les angles que les plans dont les coordonnées sont x', y', z ; x'', y'', z ;...... font, respectivement avec le même plan, des x et z, α', α''...... étant les angles d'inclinaison de chacun de ces plans sur le premier. En posant

$$x + y\sqrt{-1} = re^{\varphi\sqrt{-1}},$$

on en tirera

$$d^2x + d^2y\sqrt{-1} = re^{\varphi\sqrt{-1}}\,(d^2\varphi\sqrt{-1} - d\varphi^2)\,;$$

multipliant cette équation par la suivante :

$$x - y\sqrt{-1} = re^{-\varphi\sqrt{-1}},$$

on aura

$$xd^2x + yd^2y + (xd^2y - yd^2x)\sqrt{-1} = r^2(d^2\varphi\sqrt{-1} - d\varphi^2)\,;$$

donc :

$$xd^2y - yd^2x = r^2d^2\varphi.$$

Cette valeur ne change pas en changeant x et y en x', y' ou en x'', y''...... parce que cela revient à changer φ en $\varphi+\alpha'$, ou en $\varphi+\alpha''$,...... donc nous pourrons écrire :

$$\Sigma\int\left(\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2}\right)dm = l\frac{d^2\varphi}{dt^2}\Sigma\int r^2drdz,$$

l étant l'épaisseur commune des plans.

Calculons maintenant les forces accélératrices X et Y ; supposons pour cela que l'axe des z fait avez l'horizon l'angle β, et que la projection de cet axe sur le plan horizontal, tombe du côté des x et y positives. En appelant g la gravité, $g\cos.\beta$ exprimera cette force décomposée parallèlement au plan des x et y, et dirigée du côté des x et y positives. Soit α l'angle que fait avec l'axe des x sur le plan des x et y la trace d'un plan vertical passant par l'axe des z, $g\cos.\beta\cos.\alpha$ sera la composante de la gravité suivant l'axe des x ; $g\cos.\beta.\sin.\alpha$ sera la composante suivant l'axe des y. Telles seront les forces introduites par la gravité. Pour trouver l'expression de la résistance du milieu, observons que cette force s'oppose au mouvement, en agissant perpendiculairement aux surfaces des différents plans. Nous admettrons que cette force est proportionnelle au quarré de la vitesse, de sorte qu'en représentant par ω la vitesse angulaire de rotation, et par r la distance d'un élément à l'axe des z, la force dont il s'agit, aura pour expression $kr^2\omega^2$, k étant une quantité constante, dépendant de la densité du fluide : elle peut représenter la résistance qu'éprouve l'unité de surface qui se meut avec une vitesse égale à l'unité. Pour trouver les cosinus des angles que la direction de la résistance fait avec les axes, observons que cette direction doit être perpendiculaire à l'axe des z et au rayon vecteur r, qui, lui-même, fait avec les axes des coordonnées, les angles dont les cosinus sont respectivement $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, o ; donc en appelant a, b, c, les angles que la résistance forme avec les demi-axes des coordonnées positives, on aura :

$$\cos.c=0,\ x\cos.a+y\cos.b=0\,;$$

par conséquent

$$\frac{\cos.a}{y}=-\frac{\cos.b}{x}=\pm\frac{1}{r}\,;$$

Or, les fractions $\frac{\cos.a}{y}$ et $-\frac{\cos.b}{x}$ étant toujours positives, si le mouvement de rotation est direct, il faudra admettre le signe + devant la quantité $\frac{1}{r}$ ce qui donnera :

$$\cos.a=\frac{y}{r},\ \cos.b=-\frac{x}{r}\,;$$

et, par suite, la résistance décomposée selon les axes, deviendra

$$kry\omega^2,\ -krx\omega^2\,;$$

cette résistance est supposée agir sur l'unité de surface. Pour avoir celle qui s'exerce sur un élément $drdz$ du plan, il faudra multiplier les expressions précédentes par ce même élément. Quant à la force accélératrice due à la résistance, on la trouvera en divisant $kry\omega^2$, $-krx\omega^2$ par l'épaisseur commune des plans, épaisseur que nous avons représentée par l; de sorte que la partie des forces accélératrices, introduite par la résistance, sera, pour la composante parallèle à l'axe des x, égale à $\frac{kry\omega^2}{l}$, et pour l'axe des y, égale à $-\frac{krx\omega^2}{l}$. Donc les composantes totales seront :

$$X=g\cos.\alpha.\cos.6+\frac{kry\omega^2}{l},$$

$$Y=g\sin.\alpha.\cos.6-\frac{krx\omega^2}{l}\,;$$

par suite, en observant que $dm = ldrdz$,

$$(xY - yX)dm = [gl\cos.6(x\sin.\alpha - y\cos.\alpha) - kr^3\omega^2]drdz;$$

or, puisque $x = r\cos.\varphi$ et $y = r\sin.\varphi$, nous aurons :

$$(xY - yX)dm = -kr^3\omega^2 drdz - gl\cos.6.\, r.\sin.(\varphi - \alpha)drdz;$$

de là on tire :

$$\Sigma\int(xY - yX)dm = -k\omega^2\Sigma\int r^3 drdz - gl\cos.6\,\Sigma[\sin.(\varphi - \alpha)\int rdrdz];$$

le signe Σ représentant la somme des quantités semblables relativement à toutes les molécules, de sorte que, par exemple,

$$\Sigma\sin.(\varphi - \alpha) = \sin.(\varphi - \alpha) + \sin.(\varphi + \alpha' - \alpha) + \ldots\ldots\ldots;$$

nous aurons donc définitivement :

$$[l\Sigma\int r^2 drdz]\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + [k\Sigma\int r^3 drdz]\,\omega^2 + gl\cos.6\,\Sigma[(\int rdrdz)\sin.(\varphi - \alpha)] = 0 \ldots\ldots (\text{C}).$$

Faisons, pour plus de simplicité, $l\Sigma\int r^2 drdz = A$, $k\Sigma\int r^3 drdz = B$, et $gl\cos.6 = C$, notre équation se réduira à

$$A\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\omega^2 + C\Sigma[(\int rdrdz)\sin.(\varphi - \alpha)] = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{D});$$

et en nommant A_1, A_2, etc., les valeurs $\int rdrdz$ correspondantes aux différens plans, nous aurons évidemment :

$$\Sigma[\int(rdrdz)\sin.(\varphi - \alpha)] = A_1\sin.(\varphi - \alpha) + A_2\sin.(\varphi + \alpha' - \alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= [A_1\cos.\alpha + A_2\cos.(\alpha' - \alpha) + \ldots\ldots]\sin.\varphi - [A_1\sin.\alpha - A_2\sin.(\alpha' - \alpha) - \ldots\ldots]\cos.\varphi.$$

Posant :

$$A_1\cos.\alpha + A_2\cos.(\alpha' - \alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots = D$$

et

$$A_1\sin.\alpha - A_2\sin.(\alpha' - \alpha) - \ldots\ldots\ldots\ldots = D',$$

il vient

$$\Sigma[\int(rdrdz)\sin.(\varphi - \alpha)] = D\sin.\varphi - D'\cos.\varphi.$$

Pour réunir ces deux derniers termes en un seul, faisons $D' = D\tang.\xi$; substituant cette valeur, nous aurons :

$$\frac{D}{\cos.\xi}(\cos.\xi\sin.\varphi - \sin.\xi\cos.\varphi)$$

ou simplement

$$\frac{D}{\cos.\xi}\sin.(\varphi-\xi),$$

l'angle ξ étant déterminé par l'équation $D'=D\operatorname{tang}.\xi$;

Substituant cette valeur dans l'équation (D), il vient :

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2}+B\omega^2+\frac{CD}{\cos.\xi}\sin.(\varphi-\xi)=0.$$

En divisant par A toute l'équation, faisant pour abréger $\frac{B}{A}=M$ et $\frac{CD}{A\cos.\xi}=N$, en observant d'ailleurs que $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ nous trouverons :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+M\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=-N\sin.(\varphi-\xi)\ldots\ldots\ldots\ldots(E).$$

Telle est l'équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer; pour la ramener à être linéaire, j'observerai qu'on a $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$, et, différentiant cette expression, j'obtiens:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{\omega d\omega}{d\varphi}=\frac{1}{2}\,\frac{d(\omega^2)}{d\varphi}.$$

substituant ces valeurs dans l'équation (E), il vient :

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(\omega^2)}{d\varphi}+M\omega^2=-N\sin.(\varphi-\xi)$$

ou

$$d(\omega^2)+2M\omega^2d\varphi=-2N\sin.(\varphi-\xi)d\varphi,$$

qui n'est autre chose que l'équation de *Bernouilli;* elle devient intégrable en multipliant ses deux membres par le facteur $e^{2M\varphi}$, car il est facile de voir qu'elle se réduit alors à

$$d\left(\omega^2e^{2M\varphi}\right)=-2Ne^{2M\varphi}\sin.(\varphi-\xi)d\varphi.$$

En intégrant cette expression depuis $t=0$, et en supposant que pour $t=0$, on ait $\varphi=0$ et $\omega=\omega_0$, on trouve :

$$\omega^2e^{2M\varphi}=\omega_0^2-2N\int_0^\varphi e^{2M\varphi}\sin.(\varphi-\xi)d\varphi;$$

or, puisque

$$\sin.(\varphi-\xi)=\frac{e^{(\varphi-\xi)\sqrt{-1}}-e^{-(\varphi-\xi)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

j'aurai

$$\int_0^\varphi e^{2M\varphi}\sin.(\varphi-\xi)d\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^\varphi\left[e^{(2M+\sqrt{-1})\varphi}e^{-\xi\sqrt{-1}}-e^{(2M-\sqrt{-1})\varphi}e^{\xi\sqrt{-1}}\right]d\varphi\,;$$

et en intégrant :

$$\int_0^\varphi e^{2M\varphi}\sin.(\varphi-\xi)\,d\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\frac{\left(e^{(2M+\sqrt{-1})\varphi}-1\right)e^{-\xi\sqrt{-1}}}{2M+\sqrt{-1}}-\frac{\left(e^{(2M-\sqrt{-1})\varphi}-1\right)e^{\xi\sqrt{-1}}}{2M-\sqrt{-1}}\right\}.$$

Pour avoir cette intégrale sous forme réelle, il suffit de chercher le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'expression

$$\frac{\left(e^{(2M+\sqrt{-1})\varphi}-1\right)e^{-\xi\sqrt{-1}}}{2M+\sqrt{-1}}$$

Ce coefficient sera l'intégrale cherchée. Nous aurons de cette manière :

$$\int_0^\varphi e^{2M\varphi}\sin.(\varphi-\xi)d\varphi=\frac{e^{2M\varphi}\left[2M\sin.(\varphi-\xi)-\cos.(\varphi-\xi)\right]+2M\sin.\xi+\cos.\xi}{1+(2M)^2}$$

donc finalement :

$$\omega^2=\omega_0^2e^{-2M\varphi}-\frac{2N}{1+(2M)^2}\left\{2M\sin.(\varphi-\xi)-\cos.(\varphi-\xi)+e^{-2M\varphi}\left[2M\sin.\xi+\cos.\xi\right]\right\}.$$

Telle est la vitesse des plans à un instant quelconque de leur mouvement; quant à la détermination de l'angle φ en fonction du temps, l'intégration dont elle dépend surpasse la force de l'analyse connue. Il existe un cas où le problème se résoud entièrement, c'est celui où l'on suppose l'axe de rotation vertical; car alors, en observant que la quantité N contient le facteur $\cos.\theta$ (θ étant l'angle que l'axe fait avec l'horizon, et qui se trouve dans ce cas égal à $\frac{\pi}{2}$), on a $N=0$. Dans cette hypothèse, l'équation (F) se réduit simplement à :

$$\omega^2=\omega_0^2e^{-2M\varphi}$$

d'où

$$e^{M\varphi}=\frac{\omega_0}{\omega},$$

et en passant aux logarithmes :

$$\varphi=\frac{1}{M}\log.\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Telle est l'expression de l'angle φ en fonction de la vitesse. Il serait très-facile de trouver ce même angle en fonction du temps, car l'équation $e^{M\varphi}=\frac{\omega_0}{\omega}$ donne en remplaçant ω par $\frac{d\varphi}{dt}$

$$e^{M\varphi}d\varphi=\omega_0 dt$$

et en intégrant à partir de $t=0$,

$$\frac{1}{M}\left(e^{M\varphi}-1\right)=\omega_0 t\,,$$

d'où l'on tire pour φ la valeur suivante :

$$\varphi=\frac{1}{M}\log.(1+M\omega_0 t)\,,$$

donc aussi, en vertu de l'équation $\varphi=\frac{1}{M}\log.\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$, on a pour la vitesse ω,

$$\omega=\frac{\omega_0}{1+M\omega_0 t}\,;$$

Les équations que nous venons de poser, suffisent entièrement à la détermination du mouvement. Car, connaissant l'angle φ, on trouvera les angles que les autres plans font avec le plan des x et z, en ajoutant seulement à l'angle φ les angles α', α'', etc.

On pourrait se proposer de trouver la ligne courbe qui termine le contour d'un plan tournant autour d'un axe vertical, d'après la condition que ce plan éprouve une plus grande résistance que tout autre plan ayant la même surface et un contour différent. Pour résoudre cette question, on observera que la résistance étant proportionnelle à $\int_{z_0}^{Z} r^3dz$ (z_0 et Z étant les ordonnées extrêmes), il suffira de rendre $\int_{z_0}^{Z} r^3dz$ *maximum* parmi toutes les valeurs de r qui donnent pour $\int_{z_0}^{Z} rdz$ une quantité constante, ce qui, par les règles du *calcul des variations*, revient à rendre *maximum* absolu l'expression

$$\int_{z_0}^{Z} r^3dz-3k^2\int_{z_0}^{Z} rdz\,,$$

k étant une constante arbitraire. En égalant à zéro la variation de cette expression, on trouve :

$$3\int_{z_0}^{Z}(r^2-k^2)\delta r dz=0\,,$$

d'où

$$r=k.$$

Supposons que B représente l'aire donnée, on aura alors :

$$\int_{z_0} rdz = B,$$

et par suite

$$k(Z - z_0) = B,$$

de là

$$k = \frac{B}{Z - z^\circ},$$

donc

$$r = \frac{B}{Z - z_0} \text{ et} \int_{z_0}^{Z} r^3 dz = \frac{B^3}{(Z - z_0)^2}.$$

Ce qui nous fait voir qu'un parallélograme, tournant autour d'un axe, éprouve à égalité de surface, la plus grande résistance.

DÉTERMINATION DU RAYON VECTEUR,

DANS LE MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES PLANÈTES.

Supposons que M représente la masse du soleil, et m celle de la planète dont on cherche le rayon vecteur. Soient x et y les coordonnées rectangulaires de la planète rapportées au centre du soleil. Il sera facile de prouver que les équations du mouvement de la planète autour du soleil seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0,$$

μ représentant la somme des masses M et m, r étant $= \sqrt{x^2 + y^2}$, et dt l'élément du temps. Le principe des forces vives et celui de la conservation des aires, donnent les équations suivantes :

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 0, \quad \frac{xdy - ydx}{dt} = b,$$

$\frac{\mu}{a}$ et b représentant des constantes arbitraires. Supposons $x + y\sqrt{-1} = re^{p\sqrt{-1}}$, nous aurons

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2dp^2}{dt^2}, \text{ et } \frac{xdy - ydx}{dt} = \frac{r^2dp}{dt};$$

et puisque $\frac{r^2dp}{dt}=b$, on aura

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{b^2}{r^2},$$

par conséquent l'équation des forces vives se reduira à

$$\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{b^2}{r^2}-\frac{2\mu}{r}+\frac{\mu}{a}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{I}).$$

si l'on suppose $\frac{dr}{dt}=0$, on aura pour déterminer la plus grande et la plus petite valeur de r l'équation suivante :

$$\frac{b^2}{r^2}-\frac{2\mu}{r}+\frac{\mu}{a}=0$$

ou

$$(r-a)^2=a^2\left(1-\frac{b^2}{\mu a}\right);$$

de là

$$r=a\left(1\pm\sqrt{1-\frac{b^2}{\mu a}}\right).$$

Il est facile de conclure de cette expression que a est le grand axe de l'ellipse de la planète, et en appelant c son excentricité, on aura $b^2=\mu a(1-c^2)$, par conséquent l'équation (I) deviendra

$$dt=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\frac{r}{a}d\frac{r}{a}}{\sqrt{c^2-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}},$$

et en supposant $\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}=n$, on aura

$$nt+T=\int\frac{\frac{r}{a}d\frac{r}{a}}{\sqrt{c^2-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}},$$

T étant une constante arbitraire.

Pour intégrer le second membre on fera $\frac{r}{a}=1-c\cos.u$, u étant une nouvelle variable; on aura de cette manière

$$nt+T=u-c\sin.u.$$

Pour avoir le rayon vecteur r en fonction du temps, il faut éliminer la quantité u entre les deux équations

$$nt + T = u - c \sin. u \text{ et } \frac{r}{a} = 1 - c \cos. u,$$

ce qui s'effectuera avec facilité par la méthode de M. *Cauchy*. Ce grand géomètre a démontré qu'en représentant par $f(x)$ une fonction quelconque de x, on a le résidu $\mathcal{E}((f(x)))$ relativement à toutes les racines de l'équation $f(x) = \pm\infty$ au moyen de l'intégrale définie.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re^{p\sqrt{-1}} f\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right) dp,$$

R étant la limite supérieure des modules de toutes les racines. Cette formule et une infinité d'autres du même genre résultent des calculs développés par M. Cauchy dans un Mémoire qu'il a présenté en 1814 à l'*Institut de France*. Elles ont aussi été exposées avec détail par leur illustre auteur dans son cours de cette année au *Collége de France*. D'après cette formule, il sera très-facile de trouver la somme des fonctions symétriques des racines d'une équation $F(x) = 0$. En effet, soient x_1, x_2, x_3, etc., les racines de l'équation $F(x) = 0$, et supposons que l'on veuille trouver la somme $\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \ldots\ldots$, cette somme sera d'abord exprimée par le résidu intégral $\mathcal{E}\frac{\varphi(x)F'(x)}{((F(x)))}$, et par suite par l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{p\sqrt{-1}}\varphi\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right)F'\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right)}{F\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right)} dp.$$

Dans le cas que nous examinons, on supposera $F(x) = x - \omega - c \sin. x$, (en faisant pour abréger $nt + T = \omega$) et $\varphi(x) = \cos. x$, ce qui donnera $F'(x) = 1 - c \cos. x$, et immédiatement.

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{c}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{p\sqrt{-1}} \cos.\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right)\left[1 - c\cos.\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right)\right]dp}{Re^{p\sqrt{-1}} - \omega - c\sin.\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right)}$$

ou

$$\frac{r}{a} = 1 - c\,\mathcal{E}\frac{\cos x\left[1 - c\cos x\right]}{((x - \omega - c\sin x))} = 1 - c\,\mathcal{E}\frac{\cos x - c\cos^2 x}{((x - \omega - c\sin x))};$$

or

$$\frac{1}{x-\omega-c\sin x}=\frac{1}{x-\omega}+\frac{c\sin x}{(x-\omega)^2}+\frac{c^2\sin^2 x}{(x-\omega)^3}+\frac{c^3\sin^3 x}{(x-\omega)^4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{c^{n-1}\sin^{n-1}x}{(x-\omega)^n}+\frac{c^n\sin^n x}{(x-\omega)^n[x-\omega-c\sin x]},$$

par conséquent

$$\frac{r}{a}=1-c\,\mathcal{E}\left\{\frac{\cos x}{((x-\omega))}+c\left[\frac{\cos x\sin x}{(((x-\omega)^2))}-\frac{\cos^2 x}{((x-\omega))}\right]+c^2\left[\frac{\cos x\sin^2 x}{(((x-\omega)^3))}-\frac{\cos^2 x\sin x}{(((x-\omega)^2))}\right]\right.$$
$$\left.+c^3\left[\frac{\cos x\sin^3 x}{(((x-\omega)^4))}-\frac{\cos^2 x\sin^2 x}{(((x-\omega)^3))}\right]+\ldots\ldots\ldots+c^{n-1}\left[\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{(((x-\omega)^n))}-\frac{\cos^2 x\sin^{n-1}x}{(((x-\omega)^{n-1}))}\right]\right\}$$
$$-c^n\,\mathcal{E}\frac{\cos x\sin^{n-1}x[\sin x+(x-\omega)\cos x-2c\cos x\sin x]}{(((x-\omega)^n(x-\omega-c\sin x)))};$$

et en observant qu'en général :

$$\mathcal{E}\frac{f(x)}{(((x-\omega)^n))}=\frac{f^{(n-1)}(\omega)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

on aura

$$\frac{r}{a}=1-\left\{c\cos\omega+c^2\left[\frac{d\cos\omega\sin\omega}{d\omega}-\cos^2\omega\right]+c^3\left[\frac{d^2\cos\omega\sin^2\omega}{1.2.d\omega^2}-\frac{d\cos^2\omega\sin\omega}{d\omega}\right]\right.$$
$$\left.+c^4\left[\frac{d^3\cos\omega\sin^3\omega}{1.2.3d\omega^3}-\frac{d^2\cos^2\omega\sin^2\omega}{1.2.d\omega^2}\right]+\ldots\ldots+c^n\left[\frac{d^{n-1}\cos\omega\sin^{n-1}\omega}{1.2\ldots(n-1)d\omega^{n-1}}-\frac{d^{n-2}\cos\omega\sin^{n-2}\omega}{1.2\ldots(n-2)d\omega^{n-2}}\right]\right\}$$
$$-c^n\,\mathcal{E}\frac{\cos x\sin^{n-1}x[\sin x+(x-\omega)\cos x-2c\cos x\sin x]}{(((x-\omega)^n[x-\omega-c\sin x]))};$$

d'ailleurs on a

$$\frac{d^{n-1}\cos\omega\sin^{n-1}\omega}{1.2\ldots(n-1)d\omega^{n-1}}=-\frac{d^{n-2}\sin^n\omega}{1.2\ldots(n-1)d\omega^{n-2}}+\frac{d^{n-2}\cos^2\omega\sin^{n-2}\omega}{1.2\ldots(n-2)d\omega^{n-1}},$$

par conséquent

$$\frac{r}{a}=1-c\cos\omega+c^2\sin^2\omega+\frac{c^3d\sin^3\omega}{1.2.d\omega}+\frac{c^4d^2\sin^4\omega}{1.2.3.d\omega^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{c^nd^{n-2}\sin^n x}{1.2\ldots(n-1)d\omega^{n-2}}$$
$$-c^{n+1}\,\mathcal{E}\frac{\cos x\sin^{n-1}x[\sin x+(x-\omega)\cos x-2c\cos x\sin x]}{(((x-\omega)^n(x-\omega-c\sin\omega)))}.$$

Ce dernier résidu pourrait être transformé avec une extrême facilité en une intégrale définie, en faisant les substitutions nécessaires dans la formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re^{p\sqrt{-1}}f\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right)dp;$$

il serait superflu d'écrire cette intégrale.

Pour délivrer la dernière valeur de $\frac{r}{a}$ des différentielles qu'elle renferme, on observera qu'en général

$$\frac{d^{i-2}\sin^i\omega}{d\omega^{i-2}} = \frac{-1}{2^{i-1}}\Big\{ i^{i-2}\cos i\omega - i(i-2)^{i-2}\cos(i-2)\omega + \frac{i(i-1)}{1.2}(i-4)^{i-2}\cos(i-4)\omega$$
$$- \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}(i-6)^{i-2}\cos(i-6)\omega + \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}$$

ce qui réduit la valeur de $\frac{r}{a}$ à

$$\frac{r}{a} = 1 - c\cos\omega + \frac{c^2\cos 2\omega}{2} + c^3 . \frac{3\cos 3\omega - 3\cos\omega}{1.2.2^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}}\Big[n^{n-1}\cos n\omega - n(n-2)^{n-2}\cos(n-2)\omega + \ldots\ldots\ldots \Big]$$

expression à laquelle il faudra ajouter l'intégrale définie dont nous avons parlé plus haut.

La méthode que nous avons employée nous a conduit au développement connu du rayon vecteur en fonction du temps; mais cette méthode a l'avantage de donner le reste de la série par une intégrale définie, qui pourrait elle-même être calculée par approximation.

Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences,

THÉNARD.

26 avril 1825.

PERMIS D'IMPRIMER.

Paris, ce 27 avril 1825.

Pour le Recteur de l'Académie de Paris, l'Inspecteur-général délégué,

ROUSSELLE.

dernière valeur de $\frac{r}{a}$ est mal imprimée, il faut lui substituer la suivante :

$$1 - c\cos\omega - \frac{c^2}{1}.\frac{\cos 2\omega - 1}{2} - \frac{c^3}{1.2}.\frac{3\cos 3\omega - 3\cos\omega}{2^2} - \ldots - \frac{c^n}{1.2\ldots(n-1)}\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{ n^{n-2}\cos n\omega - n(n-2)^{n-2}\cos(n-2)\omega + \ldots \Big\}$$